Limites et continuité

Limites et comportements asymptotiques

I) Opérations sur les limites

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi}{x}} = 1$$

on pose $t = \frac{\pi}{x}$

si $x \to +\infty$

$t = \frac{\pi}{x} \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$+\infty$

$\frac{a}{\infty}$ $= 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - 2x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} - 2x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} |x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2x$$

$$\lim_{+\infty} x\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} - 2\right) = -\infty$$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

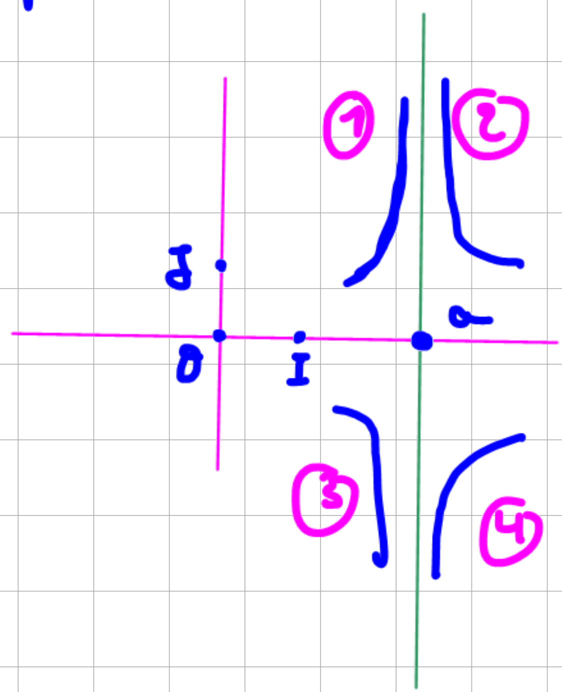
$\sqrt{x^2} = |x|$

$\sqrt{x}^2 = x$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim f+g$	$\lim f\cdot g$	$\lim \frac{f}{g}$	$\lim \lvert f\rvert$	$\lim \sqrt{\lvert f\rvert}$
a	b	$a+b$	$a\times b$	$\frac{a}{b}$ $b\neq 0$	$\lvert a\rvert$	$\sqrt{\lvert a\rvert}$
$a>0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	a	a
$a<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\lvert a\rvert$	$\lvert a\rvert$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$
0	0	0	0		0	0
0	$+\infty$	$+\infty$		0	0	0
0	$-\infty$	$-\infty$		0	0	0

Limites et comportement asymptotique

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Longrightarrow \Delta : x = a \text{ asymptote verticale}$$



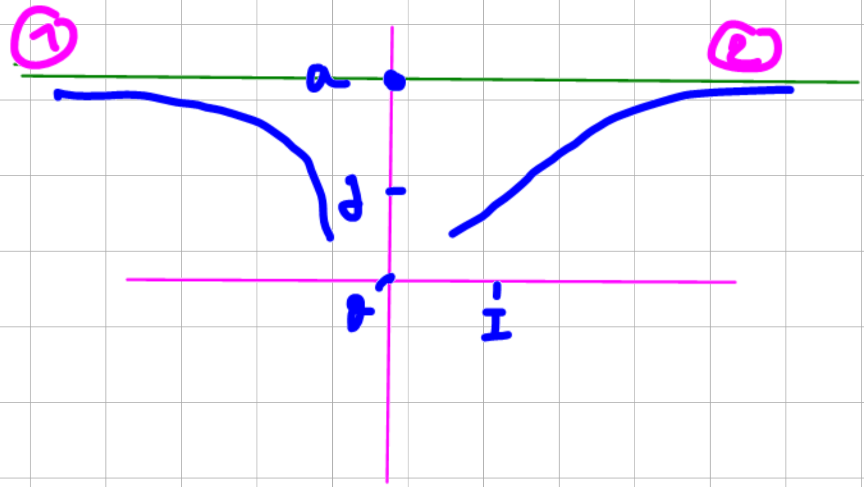
(1) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

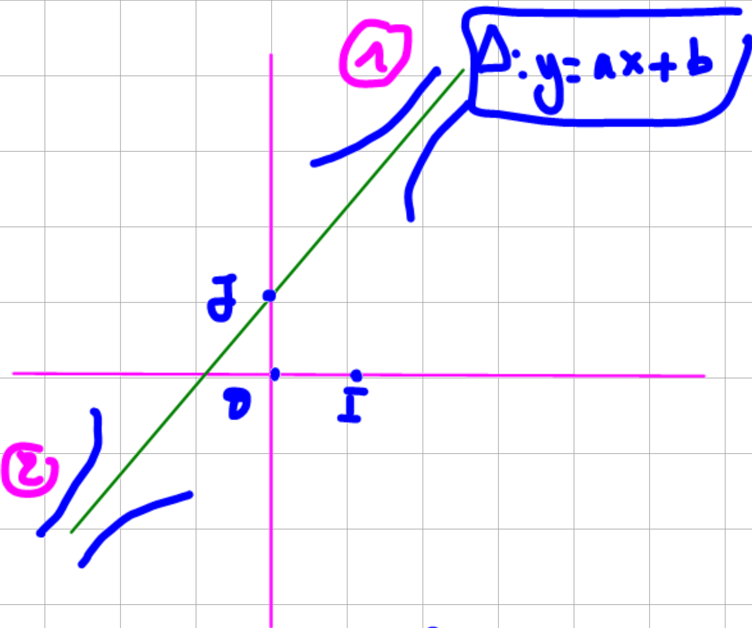
(4) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Longrightarrow \Delta : y=a$ asymptote horizontale au voisinage de ∞



① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-(ax+b)=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-ax=b$

$\Longrightarrow$ $\Delta : y=ax+b$ asymptote oblique à C_f au voisinage de ∞

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$

② $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$

$f(x) \leq g(x)$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$

$\lim_{x \to a} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to a} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to a} h(x) = \ell \end{array}\right\} \lim_{x \to a} g(x) = \ell$$

$f(x) = x^2 \cos x - 1$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-x^2 \leq x^2 \cos x \leq x^2$

$-x^2 - 1 \leq x^2 \cos x - 1 \leq x^2 - 1$

$-x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^2 - 1$

$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0} -x^2 - 1 = -1 \\ \lim_{x \to 0} x^2 - 1 = -1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = -1$$

II) Continuité en un réel

Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition si f et g sont continues en a alors $f+g$ et $f \cdot g$ sont continues en a

si f est continue en a alors αf est continue en a ($\alpha \in \mathbb{R}$)

si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{f^n}$ sont continues en a

si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a

si f est continue en a et $f \geq 0$ alors $\sqrt{f}$ est continue en a

$$f(x) \begin{cases} 2x-1 & x \leq 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} & x > 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en 1

$$f(1) = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{1^+} f(x) = \lim_{1^+} \frac{x}{2} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\lim_{1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x - 1 = 2 - 1 = 1$$

$\lim_{1^+} f(x) = \lim_{1^-} f(x) = f(1)$ alors f est continue en a

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$$

Ensemble de définition

$f(x)$ définie si $x^2+2x-3 \neq 0$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \qquad a+b+c = 1+2+(-3) = 0$$

$D_f : \mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$ $\qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$

$f(x)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+3)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

f est prolongeable par continuité en 1

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3} & x \neq 1 \text{ et } x \neq -3 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

III) Limite et continuité d'une fonction composée

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$g(x) = x^2+3$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-4}$$

$$f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-4} = \frac{x^2+3+1}{x^2+3-4}$$

$$= \frac{x^2+4}{x^2-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } g \text{ est continue en } a \\ f \text{ est continue en } g(a)\end{array}\right\} f\circ g \text{ est continue en } a$$

$g(x) = \frac{1}{x}$ continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ en particulier en 2

$$g(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$f(x) = \sin x$ continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en $0{,}5$

$$f\circ g = f(g(x)) = \sin(g(x)) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ continue en } 2$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} f(x) = c\end{array}\right\} \lim_{x\to a} f\circ g = c$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2+1 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 5} \sin(\pi x) = \sin 5\pi = \sin\pi = 0\end{array}\right\} \lim_{x\to 2} f\circ g = \lim_{x\to 2} f(g(x))$$

$$= \lim_{x\to 2} \sin(\pi\cdot g(x))$$

$$= \lim_{x\to 2} \sin(\pi(x^2+1)) = 0$$

$D_{f\circ g(x)}$ $\quad \begin{cases} x \in D_g \\ g \in D_f \end{cases}$

$f(x)$ défini sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$x \neq 3$

$g(x)$ défini sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$x \neq 1$

$g(4) = 3$

$D_{f\circ g}$ $\{x \in D_g$ et $g(x) \in D_f\}$

$\{x \in \mathbb{R} / x \neq 1$ et $g(x) \neq 3\}$

$\{x \in \mathbb{R} / x \neq 1$ et $x \neq 4\}$ $\quad D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 4\}$

$$\left.\begin{cases} \text{si } g \text{ est } \nearrow \text{ sur } I \\ g(I) = J \\ f \text{ est } \nearrow \text{ sur } J \end{cases}\right\} \Rightarrow f\circ g \text{ est } \nearrow \text{ sur } I$$

$$\left.\begin{cases} \text{si } g \text{ est } \searrow \text{ sur } I \\ g(I) = J \\ f \text{ est } \searrow \text{ sur } J \end{cases}\right\} \Rightarrow f\circ g \text{ est } \nearrow \text{ sur } I$$

$$\left.\begin{cases} \text{si } g \text{ est } \nearrow \text{ sur } I \\ g(I) = J \\ f \text{ est } \searrow \text{ sur } J \end{cases}\right\} \Rightarrow f\circ g \text{ est } \searrow \text{ sur } I$$

$$\left.\begin{cases} \text{si } g \text{ est } \searrow \text{ sur } I \\ g(I) = J \\ f \text{ est } \nearrow \text{ sur } J \end{cases}\right\} \Rightarrow f\circ g \text{ est } \searrow \text{ sur } I$$

$g(x) = x^2 + 1 \qquad I = [0,1] \quad \Rightarrow \quad g$ est $\nearrow$ sur $[0,1]$

$g'(x) = 2x > 0$ sur $[0,1]$

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a^2 > b^2 \\ a^2 + 1 > b^2 + 1 \\ g(a) > g(b) \end{array}\right\} g \text{ est } \nearrow \text{ sur } [0,1]$$

$g([0,1]) = [1,2]$

$f(x) = 2x + 3$

f est $\nearrow$ sur $[1,2]$

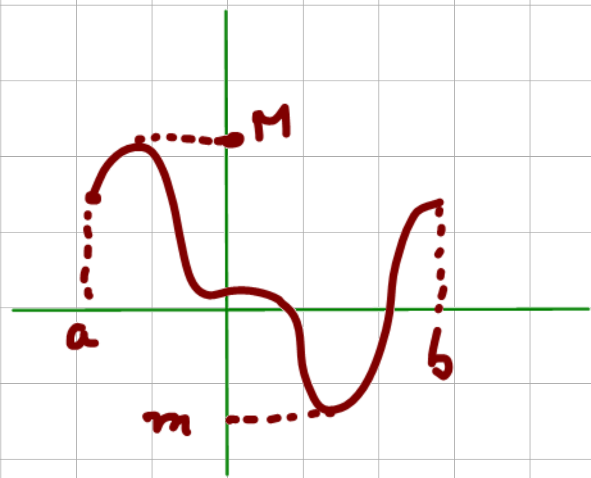
fog est ↗ sur $[0,1]$

IV) - Image d'un intervalle par une fonction continue

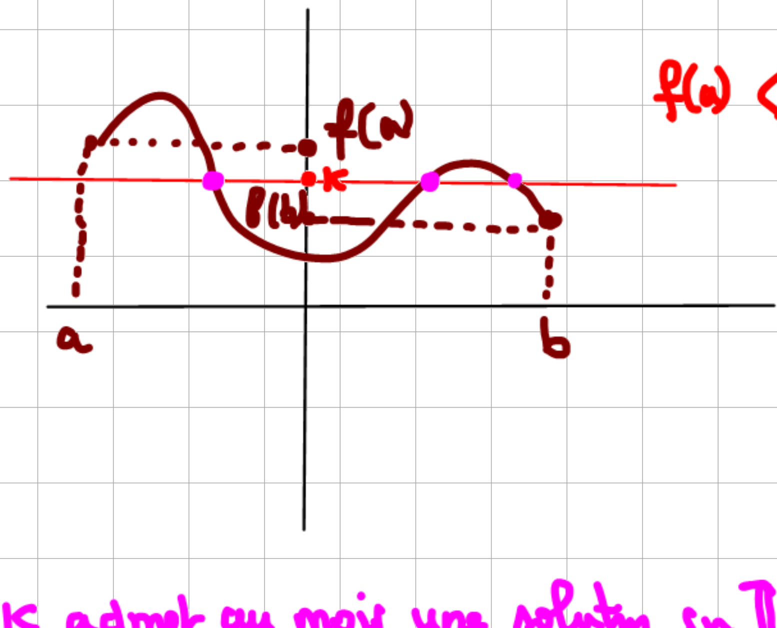
$f([a,b]) = [m\ M]$

m : minimum de f sur $[a,b]$

M : maximum de f sur $[a,b]$



$f(a) < k < f(b)$



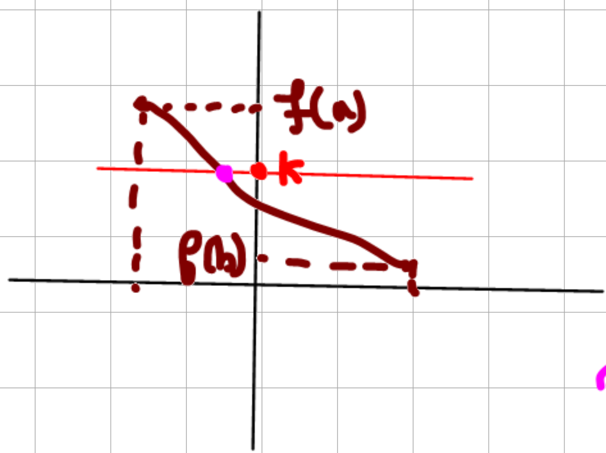
l'équation $f(x)=k$ admet 3 solution

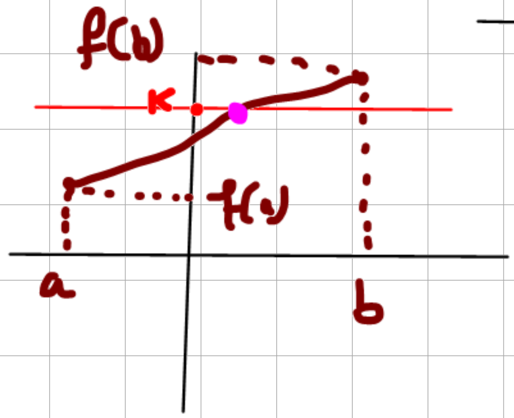
l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution sur $]a,b[$

- f est continue sur $]a,b[$
- $f(a) < k < f(b)$

l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution sur $]a,b[$

- f est continue sur $]a,b[$
- $f(a) < 0 < f(b)$ $\Longrightarrow$ $f(a)\cdot f(b) < 0$





l'équation $f(x)=K$ admet une unique solution sur $]a,b[$

- f est continue sur $]a,b[$
- f est strictement monotone sur $]a,b[$
- $f(a) < K < f(b)$

l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]a,b[$

- f est continue sur $]a,b[$
- f est strictement monotone sur $]a,b[$
- $f(a)\cdot f(b) < 0$

$f([a,b]) = [f(a) ; f(b)]$ f est $\nearrow$

$f(]a,b[) =]\lim_{a^+} f ; \lim_{b^-} f[$ f est $\nearrow$

$f(]a,b]) =]\lim_{a^+} f ; f(b)]$ f est $\nearrow$

$f([a,b[) = [f(a) ; \lim_{b^-} f[$ f est $\nearrow$

$f([a,b]) = [f(b) ; f(a)]$ f est $\searrow$

$f(]a,b[) =]\lim_{b^-} f ; \lim_{a^+} f[$ f est $\searrow$

$f(]a,b]) = [f(b) ; \lim_{a^+} f(x)[$ f est $\searrow$

$f([a,b[) =]\lim_{b^-} f ; f(a)]$ f est $\searrow$