RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale 2025
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

Exercice 1 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2 - 2iz - 3 - 2i\sqrt{3} = 0$.

a) Vérifier que $(2\sqrt{3}+2i)^2 = 8+8i\sqrt{3}$. ✓

b) Résoudre l'équation (E).

1)a)

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad i^2 = -1$

$(2\sqrt{3}+2i)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2.2\sqrt{3}.2i + (2i)^2$

$= 4\times 3 + 4\sqrt{3}.2i + 4(-1)$

$= \boxed{12} + 8\sqrt{3}i \boxed{-4}$

$= \boxed{8} + 8\sqrt{3}i$

b) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2i \\ c = -3-2i\sqrt{3} \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$= (-2i)^2 - 4.1.(-3-2i\sqrt{3})$

$= 4(-1) - 4(-3-2i\sqrt{3})$

$= -4 + 12 + 8i\sqrt{3}$

$= 8 + 8i\sqrt{3}$

$\Delta = (2\sqrt{3}+2i)^2$ $\quad \delta = 2\sqrt{3}+2i$

$z' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{2i-(2\sqrt{3}+2i)}{2\times 1} = \frac{\cancel{2i}-2\sqrt{3}\cancel{-2i}}{2} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

$z'' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{2i+(2\sqrt{3}+2i)}{2\times 1} = \frac{2i+2\sqrt{3}+2i}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3}+4i}{2} = \frac{2(\sqrt{3}+2i)}{2}$

$z'' = \sqrt{3}+2i$

$S_{\mathbb{C}} : \{-\sqrt{3} \,;\, \sqrt{3}+2i\}$

On considère les points I, A et B d'affixes $z_I = i$, $z_A = -\sqrt{3}$ et $z_B = \sqrt{3} + 2i$.

Dans **la figure 1** de l'annexe jointe, on a tracé le cercle (ζ) de centre I et de rayon 2.

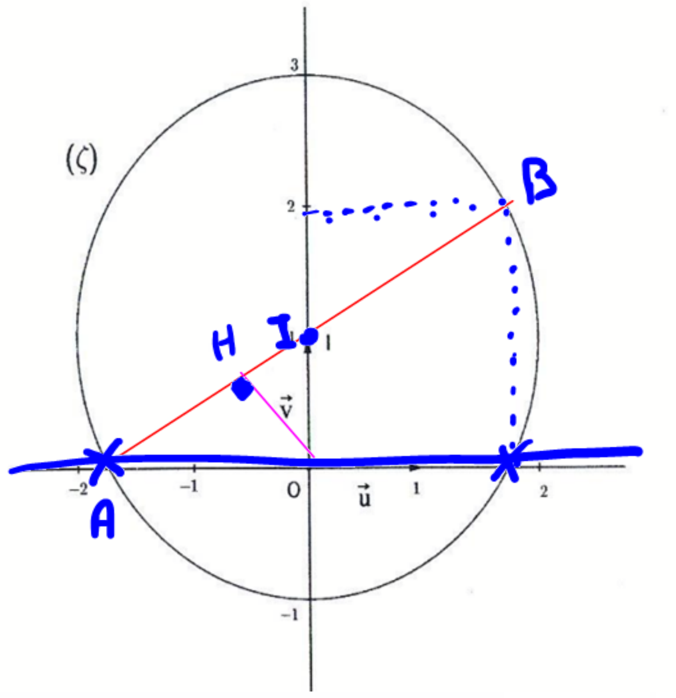
2) a) Justifier que $z_B - z_A = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) Montrer que $[AB]$ est un diamètre de (ζ).

c) Placer les points A et B.

$A(-\sqrt{3}, 0)$

$B(\sqrt{3}, 2)$ ✓



2) a) $z_B - z_A = (\sqrt{3} + 2i) - (-\sqrt{3})$

$= \sqrt{3} + 2i + \sqrt{3}$

$= \underbrace{2\sqrt{3} + 2i}$

$|z_B - z_A| = |2\sqrt{3} + 2i| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}$

$= \sqrt{4 \times 3 + 4}$

$= \sqrt{16}$

$= 4$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{\pi}{6} [2\pi]$

$z_B - z_A = |z_B - z_A| \cdot e^{i\theta}$

$= 4e^{i\pi/6}$

b) $[AB]$ diametre de cercle (ζ)

$AB = 2 \times$ rayon

$AB = 2 \times 2$

$= 4$

$AB = |z_B - z_A|$

$= 4$

donc $[AB]$ est le diamete de cercle (ζ)

3) Soit H le point d'affixe $z_H = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$.

a) Montrer que les points A, B et H sont alignés.

b) Justifier que $z_H = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

c) Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB). Placer le point H.

a) $\frac{\text{aff}(\vec{AB})}{\text{aff}(\vec{AH})} = \frac{z_B - z_A}{z_H - z_A} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i-(-\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{4}}+\frac{3}{4}i+\boxed{\frac{4\sqrt{3}}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{\boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}+\frac{3}{4}i}$

$= \frac{2\sqrt{3}+2i}{\frac{3\sqrt{3}+3i}{4}} = \frac{4(2\sqrt{3}+2i)}{3\sqrt{3}+3i}$

$= \frac{4\times 2(\cancel{\sqrt{3}+i})}{3(\cancel{\sqrt{3}+i})}$

$= \frac{8}{3} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires
donc les pts A, B et H sont alignés

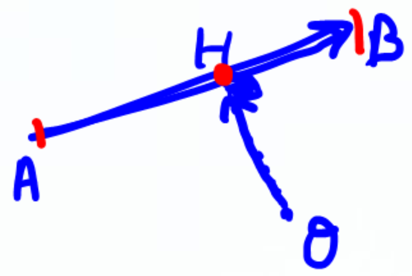
b) $z_H = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$

$|z_H| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{16}+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{\cancel{4}\times 3}{\cancel{4}\times 4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6:2}{4\sqrt{3}:2} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}.\cancel{\sqrt{3}}}{2.\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \theta = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$z_H = |z_H|.e^{i\theta} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

c)



H: projeté orthogonal de O sur [AB]

$\frac{\text{aff}(\vec{AB})}{\text{aff}(\vec{OH})} = \frac{z_B - z_A}{z_H - z_O} = \frac{z_B - z_A}{z_H} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

$= \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{4\times 2}{\sqrt{3}} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

$= \frac{8}{\sqrt{3}}(-i)$

$= -\frac{8}{\sqrt{3}} i \in i\mathbb{R}$

$\frac{\alpha e^{i\theta_1}}{\beta e^{i\theta_2}} = \frac{\alpha}{\beta} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

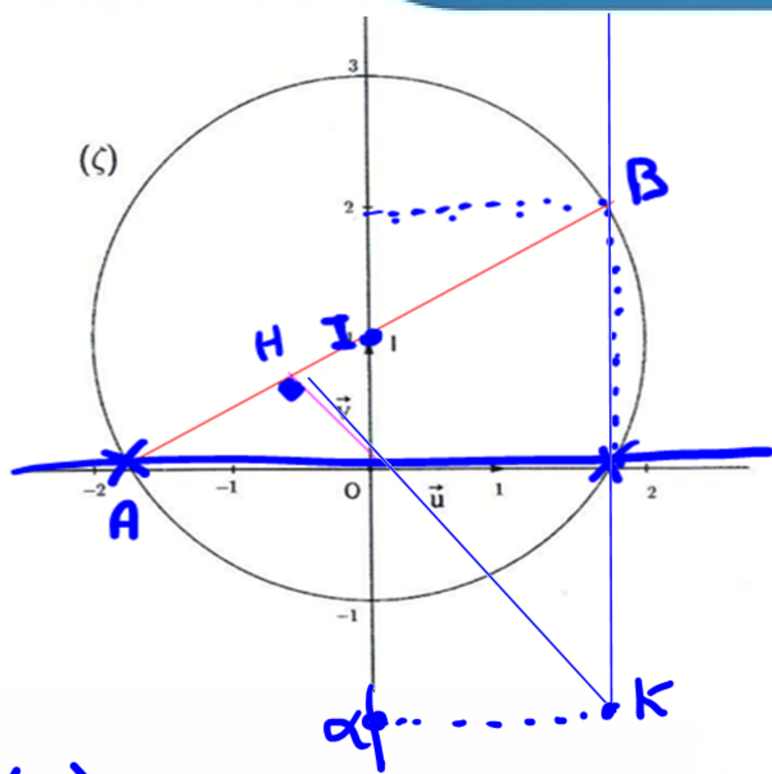
$\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi\times 2}{3\times 2} = \frac{\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} = \frac{-3\pi:3}{6:3} = \frac{-\pi}{2}$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{OH}$ sont orthogonaux,
et puisque A, B et H sont alignés
donc $H \in [AB]$ $\Rightarrow$ H: projeté orthogonal de O sur (AB)

4) La perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par B coupe (OH) en un point K d'affixe z_K.

a) Justifier que $Re(z_K) = \sqrt{3}$.

b) Déterminer alors z_K.



a) $(BK) \parallel (O\vec{i})$

Les pts B et K ont le même partie réel

$x_B = x_K$

$Re(z_K) = Re(z_B)$
$= \sqrt{3}$

$B(\sqrt{3} ; 2)$

$Re(z_B) = \sqrt{3}$ $\quad Im(z_B) = 2$

b) $z_K = Re(z_K) + i\,Im(z_K)$
$= \sqrt{3} + i\alpha$

$\vec{OH}$ et $\vec{OK}$ sont colinéaires

$\dfrac{aff(\vec{OH})}{aff(\vec{OK})} = \beta \in \mathbb{R}$

$\dfrac{z_H - z_O}{z_K - z_O} = \beta$

$\dfrac{z_H}{z_K} = \beta \implies z_H = \beta . z_K$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4} i = \beta(\sqrt{3} + i\alpha)$

$\boxed{-\dfrac{\sqrt{3}}{4}} + \boxed{\dfrac{3}{4}} i = \boxed{\beta\sqrt{3}} + \boxed{\beta} . i \boxed{\alpha}$

$\begin{cases} \beta\sqrt{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \\ \beta . \alpha = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

$\beta = \dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$= -\dfrac{1}{4}$

$\alpha = \dfrac{\frac{3}{4}}{\beta} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{-4}{1} = -3$

$z_K = \sqrt{3} + i\alpha$
$= \sqrt{3} - 3i$

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1,1,3)$, $B(-3,1,1)$ et $C(3,-2,1)$.

1) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x+2y-2z+3=0$.

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3-1 \\ 1-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (0-6)\vec{i} - (8-(-4))\vec{j} + (12-0)\vec{k}$$

$$= -6\vec{i} - 12\vec{j} + 12\vec{k} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires $\Rightarrow$ Les points A, B et C ne sont pas alignés

A, B et C détermine un plan P

b) $P_{(ABC)} : ax + by + cz + d = 0$

$P : -6x - 12y + 12z + d = 0$

$A(1,1,3) \in P_{(ABC)}$

$-6 \cdot x_A - 12y_A + 12z_A + d = 0$

$-6\times 1 - 12\times 1 + 12\times 3 + d = 0$

$-6 - 12 + 36 + d = 0$

$-18 + 36 + d = 0$

$18 + d = 0$ $\quad d = -18$

$P : -6x - 12y + 12z - 18 = 0$

$$\boxed{P : 1x + 2y - 2z + 3 = 0}$$

2) a) Vérifier que le point $D(3,5,-1)$ n'appartient pas au plan P.

b) Soit Q le plan passant par D et parallèle au plan P.

Montrer qu'une équation cartésienne de Q est $x+2y-2z-15=0$.

$P: x+2y-2z+3=0$

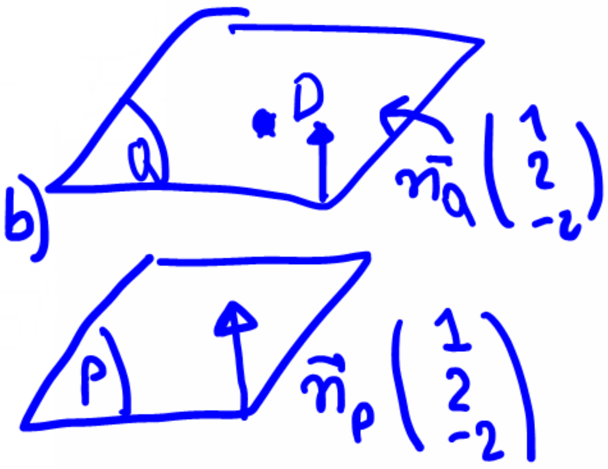
2)a) $x_D+2y_D-2z_D+3 = 3+2\times5-2\times(-1)+3$

$= 3+10+2+3$

$= 18 \neq 0$

$D \notin P$

b)



$Q: ax+by+cz+d=0$

$Q: x+2y-2z+d=0$

$D(3,5,-1) \in Q$

$x_D+2y_D-2z_D+d=0$

$3+2\times5-2\times(-1)+d=0$

$3+10+2+d=0$

$15+d=0 \qquad d=-15$

$\boxed{Q: x+2y-2z-15=0}$

3) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+5=0$.

a) Montrer que (S) est la sphère de centre $I(2,3,1)$ et de rayon $R=3$.

b) Montrer que (S) est tangente au plan P en A et au plan Q en D.

3) $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+5=0$

$\Rightarrow x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

$\boxed{x^2-ax}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$

a) $\boxed{x^2-4x}+\boxed{y^2-6y}+\boxed{z^2-2z}=-5$

$\left(x-\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2+\left(y-\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(z-\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2=-5$

$(x-2)^2-2^2+(y-3)^2-3^2+(z-1)^2-1^2=-5$

$(x-2)^2\boxed{-4}+(y-3)^2\boxed{-9}+(z-1)^2\boxed{-1}=-5$

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2-14=-5$

$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=-5+14$

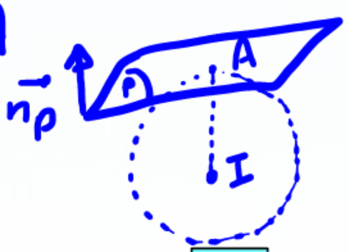
$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=9$

L'ensemble (S) est une sphère de centre $I(2,3,1)$ et de rayon $R=\sqrt{9}=3$

b) $d(I,P)=R$ $\qquad P: x+2y-2z+3=0$

$d(I,P)=\frac{|2+2\times3-2\times1+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|2+6-2+3|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|9|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{9}\cdot\cancel{\sqrt{9}}}{\cancel{\sqrt{9}}}=\sqrt{9}=3=R$

donc $S\cap P=$ un point A



$\vec{IA}$ et $\vec{n}_P$ sont colinéaires

$A\in S$

$\boxed{A\in P}$

$x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+5=0.$

$1^2+1^2+3^2-4\times1-6\times1-2\times3+5$

$\boxed{1}+\boxed{1}+\boxed{9}\boxed{-4}\boxed{-6}\boxed{-6}\boxed{+5}$

$\boxed{16}\boxed{-16}=0$

$A\in S$

$\vec{IA}:\begin{pmatrix}\boxed{1}-2\\ \boxed{1}-3\\ \boxed{3}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{n}_P\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

$\vec{IA}=-\vec{n}_P \Rightarrow \vec{IA}$ et $\vec{n}_P$ sont colinéaires $\qquad \vec{IA}=\alpha\cdot\vec{n}_P$

$S\cap P:\{A\}$

$d(I,Q)$

$Q : x+2y-2z-15=0$

$I(2,3,1)$

$$d(I,Q)=\frac{|2+2\times3-2\times1-15|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|2+6-2-15|}{\sqrt{9}}=\frac{|-9|}{\sqrt9}=\frac{9}{\sqrt9}=\frac{\sqrt9\sqrt9}{\sqrt9}=\sqrt9=3=\text{rayon}$$

$S\cap Q$: un point D

$\vec{ID}=\alpha\vec{n}_Q$ ✓

$D\in S$ ✓

$D\in Q$

$x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+5=0.$

$3^2+5^2+(-1)^2-4\times3-6\times5-2\times(-1)+5$

$\boxed{9}+\boxed{25}+\boxed{1}-12-30\ \boxed{+2}+\boxed{5}$

$\boxed{42}-42=0$

$D\in S$

$$\vec{ID}\begin{pmatrix}\boxed{3}-2\\ \boxed{5}-3\\ \boxed{-1}-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\qquad \vec{n}_Q\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{ID}=1.\vec{n}_Q$

$\vec{ID}$ et $\vec{n}_Q$ sont colinéaire

$$S\cap Q : \{D\}$$

4) Soit $t\in\,]1,+\infty[$, on considère le point $J(2+t,3+2t,1-2t)$.

a) Montrer que les points A, D et J sont alignés.

b) Vérifier que $d(J,P)=3t+3$ et $d(J,Q)=3t-3$.

5) Soit (S_t) la sphère de centre J et tangente au plan P.

Montrer que (S_t) et Q se coupent suivant le cercle de rayon $r=6\sqrt{t}$ et de centre D.

$A(1,1,3)$

$D(3,5,-1)$

a) $$\vec{AD}\begin{pmatrix}3-1\\5-1\\-1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{2}\\\boxed{4}\\\boxed{-4}\end{pmatrix}$$

$$\vec{AJ}\begin{pmatrix}2+t-1\\3+2t-1\\1-2t-3\end{pmatrix}$$

$$\vec{AJ}\begin{pmatrix}1+t\\2+2t\\-2-2t\end{pmatrix}=(1+t)\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{AJ}=(1+t)\begin{pmatrix}\boxed{1}\\\boxed{2}\\\boxed{-2}\end{pmatrix}$$

$$=(1+t)\boxed{\tfrac12}\begin{pmatrix}\boxed{2}\\\boxed{4}\\\boxed{-4}\end{pmatrix}$$

$$\vec{AJ}=\frac{(1+t)}{2}\vec{AD}$$

$\vec{AJ}=\alpha\vec{AD}$

$\vec{AJ}$ et $\vec{AD}$ sont colinéaire

A, J, D sont alignés

b) $P : x+2y-2z+3=0$

$$d(J,P)=\frac{|2+t+2(3+2t)-2(1-2t)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{|\boxed{2}+t+\boxed{6}+4t\boxed{-2}+4t\boxed{+3}|}{\sqrt9}=\frac{|9+9t|}{\sqrt9}$$

$$=\frac{9|1+t|}{\sqrt9}=\frac{9(1+t)}{\sqrt9}$$

$$=\frac{\sqrt9.\sqrt9\,(1+t)}{\sqrt9}=\sqrt9(1+t)=3(1+t)=3+3t$$

$$d(J,Q)=\frac{|2+t+2(3+2t)-2(1-2t)-15|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{|\boxed{2}+t+\boxed{6}+4t\boxed{-2}+4t\boxed{-15}|}{\sqrt9}$$

$Q : x+2y-2z-15=0$

$J(2+t\,;3+2t\,;1-2t)$

$$=\frac{|-9+9t|}{\sqrt9}=\frac{9|t-1|}{\sqrt9}=\frac{9(t-1)}{\sqrt9}=\frac{\sqrt9\sqrt9(t-1)}{\sqrt9}=3(t-1)=3t-3$$

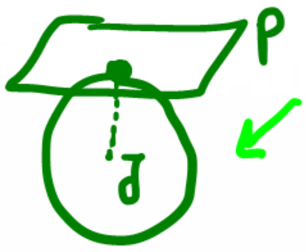
5) Soit (S_t) la sphère de centre J et tangente au plan P.

Montrer que (S_t) et Q se coupent suivant le cercle de rayon $r = 6\sqrt{t}$ et de centre D.

Rayon de sphère $= d(J,P)$

$d(J,P) = 3t+3$

Rayon de sphère (S_t) $R = 3t+3$



$d(J,Q) = 3t-3 < R = 3t+3$

donc $S \cap Q$: cercle

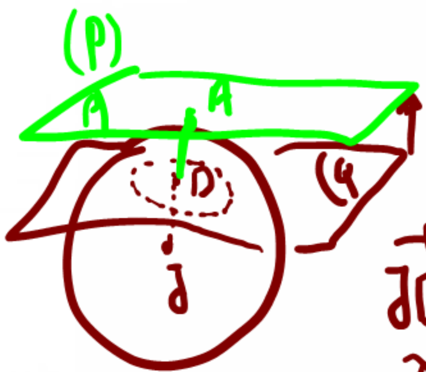
$r = \sqrt{R^2 - d^2(J,Q)} = \sqrt{\boxed{3t+3}^2 - \boxed{3t-3}^2}$

$\boxed{a^2-b^2} = \boxed{(a-b)(a+b)}$

$= \sqrt{(3t+3-3t+3)(3t+3+3t-3)}$

$= \sqrt{6(6t)} = \sqrt{36t} = \sqrt{36}\sqrt{t}$

$r = 6\sqrt{t}$



A, D, J alignés

$\vec{JD} = \alpha \vec{n}_Q$

$D \in Q$ ✓

$\boxed{\vec{JD}} = \alpha \boxed{\vec{DA}}$

$\boxed{\vec{DA}} = \alpha' \boxed{\vec{n}_Q}$

Exercice 3 (3 points)

Une étude médicale faite sur une population donnée a montré que :

- 20% des individus de la population sont diabétiques.
- Parmi les individus diabétiques, 30% souffrent d'insuffisance rénale.
- Parmi les individus non diabétiques, 5% souffrent d'insuffisance rénale.

On choisit au hasard une personne dans cette population et on considère les événements suivants :

D : « La personne choisie est diabétique ».

R : « La personne choisie souffre d'insuffisance rénale».

1) a) Donner les probabilités $p(D)$, $p(R/D)$ et $p(R/\bar{D})$.

b) Montrer que $p(R) = 0.1$.

c) Sachant que la personne choisie souffre d'insuffisance rénale, quelle est la probabilité qu'elle soit diabétique.

1) a)

$p(D) = 0,2$

$p(R/D) = 0,3$

$p(R/\bar{D}) = 0,05$

b) $p(R) = \boxed{p(R\cap D)} + p(R\cap \bar{D})$

$= \boxed{p(D)\times p(R/D)} + p(\bar{D})\cdot p(R/\bar{D})$

$= \boxed{0,2\times 0,3} + 0,8\times 0,05$

$= 0,1$

c)

$p(D) = 0,2$

$p(\bar{D}) = 1 - p(D)$

$= 1 - 0,2 = 0,8$

$p(D/R) = \dfrac{\boxed{p(D\cap R)}}{p(R)}$

$= \dfrac{p(D)\cdot p(R/D)}{p(R)} = \dfrac{0,2\times 0,3}{0,1} = 0,6$

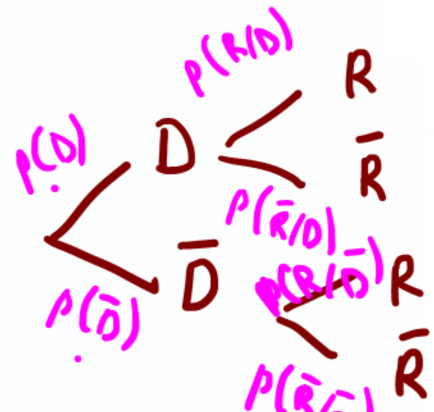
2) L'étude a montré aussi que le coût estimé, par personne, des soins annuels relatifs aux deux maladies objets de l'étude est :

- Zéro Dinars si la personne ne souffre d'aucune des deux maladies.
- 2000 Dinars si la personne est uniquement diabétique.
- 3000 Dinars si la personne souffre uniquement d'insuffisance rénale.
- 6000 Dinars si la personne est diabétique et souffre d'insuffisance rénale.

On désigne par X l'aléa numérique donnant le coût estimé, par personne, des soins annuels relatifs aux deux maladies objets de l'étude.

a) Vérifier que $p(X=0)=0.76$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X.



a) $p(X=0) = p(\bar{D} \cap \bar{R}) = p(\bar{D}) . p(\bar{R}/\bar{D})$

$= 0,8 \times 0,95$

$= 0,76$

$p(\bar{R}/\bar{D}) = 1 - p(R/\bar{D})$

$= 1 - 0,05$

$= 0,95$

$\boxed{p(R/D) + p(\bar{R}/D) = 1}$

$\to p(\bar{R}/D) = 1 - p(R/D)$

$p(R/D) = 1 - p(\bar{R}/D)$

$\boxed{p(R/\bar{D}) + p(\bar{R}/\bar{D}) = 1}$

$p(\bar{R}/\bar{D}) = 1 - p(R/\bar{D})$

b) $p(X=0) = 0,76$

$p(X=2000) = p(D \cap \bar{R}) = p(D) . p(\bar{R}/D) = 0,2 \times (1 - p(R/D))$

$= 0,2 \times (1 - 0,3)$

$= 0,2 \times 0,7$

$= 0,14$

$p(X=3000) = p(\bar{D} \cap R) = p(\bar{D}) \cdot p(R/\bar{D})$
$= 0{,}8 \times 0{,}05$
$= 0{,}04$

$X=x_i$	0	2000	3000	6000
$p(X=x_i)$	0,76	0,14	0,04	0,06

$p(X=6000) = p(D \cap R) = p(D) \cdot p(R/D)$
$= 0{,}2 \times 0{,}3$
$= 0{,}06$

Exercice 4 (7.5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\frac{e^x}{x^2}$.

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I/1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

I) 1) a) $\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} (x-1)\cdot\frac{e^x}{x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{0^+} x-1 = -1$

$\lim\limits_{0^+} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ ($e^x \to 1$, $x^2 \to 0^+$)

$\Delta : x=0$ asymptote verticale à $\mathcal{C}$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \Delta : x=a$ asymptote verticale

b) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} (x-1)\boxed{\frac{e^x}{x^2}} = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} x-1 = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

$\lim\limits_{\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$
$\mathcal{C}$ admet une B.p direction $(O\vec{j})$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} (x-1)\cdot\frac{e^x}{x^3} = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} x-1 = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{e^x}{x^3} = \boxed{+\infty}$

$\frac{\left(\frac{e^x}{x^2}\right)}{x} = \frac{e^x}{x^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{e^x}{x^3}$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ admet une B.p de direction $(O\vec{j})$

2) a) Montrer que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\left((x-1)^2+1\right)e^x}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

$f(x)=(x-1)\dfrac{e^x}{x^2}$ $\qquad (u.v)'=u'.v+v'.u$ $\qquad \boxed{\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'u}{v^2}}$

$(e^x)'=e^x$

$(e^{ax})'=a\,e^{ax}$

$(x^2)'=2x$

$f'(x)=(x-1)'\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)+\left(\boxed{\dfrac{e^x}{x^2}}\right)^{\boxed{'}}(x-1)$

$=(1-0)\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)+\dfrac{(e^x)'(x^2)-\boxed{(x^2)'}.e^x}{x^4}(x-1)$

$=1.\dfrac{e^x}{x^2}+\dfrac{e^x.x^2-\boxed{2x}.e^x}{x^4}(x-1)$

$=\dfrac{e^x}{x^2}+\dfrac{x^2e^x-2xe^x}{x^4}(x-1)$

$=\dfrac{e^x}{x^2}+\dfrac{\cancel{x}(xe^x-2e^x)(x-1)}{\cancel{x}\,x^3}$

$=\dfrac{e^x}{x^2}+\dfrac{e^x(x-2)(x-1)}{x^3}$

$=\dfrac{xe^x}{x^3}+\dfrac{e^x(x-2)(x-1)}{x^3}=\dfrac{e^x\left(x+(x-2)(x-1)\right)}{x^3}$

$=\dfrac{e^x\left(\boxed{x+}\,x^2\boxed{-x}-2x+2\right)}{x^3}$

$=\dfrac{e^x\left(\boxed{x^2-2x+1}+1\right)}{x^3}$

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^x\left((x-1)^2+1\right)}{x^3}}$$

b) $\boxed{f'(x)}=\dfrac{\boxed{e^x}\left(\boxed{(x-1)^2}\boxed{+1}\right)}{\boxed{x}^3}$ pour tout $\boxed{x\in]0,+\infty[}$

x	0		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{e^x}{x}$ et (C_F) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier la position relative de (C_f) et (C_F).

b) Montrer que F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

a) $\boxed{f(x)}-\boxed{F(x)}=(x-1)\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{e^x}{x}$

$=(x-1)\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{xe^x}{x^2}$

$=\dfrac{e^x}{x^2}\left(\boxed{x}-1\boxed{-x}\right) \quad = \boxed{-1}\cdot\dfrac{\boxed{e^x}}{\boxed{x^2}}\ \boxed{<0}$

C_F au dessus de C_f
(sur)
فوق

b) $F'(x)=$

$F(x)=\dfrac{e^x}{x}$ dérivable sur $]0,+\infty[$

$F'(x)=\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'=\dfrac{(e^x)'.x-x'.e^x}{x^2}=\dfrac{e^x.x-1.e^x}{x^2}$

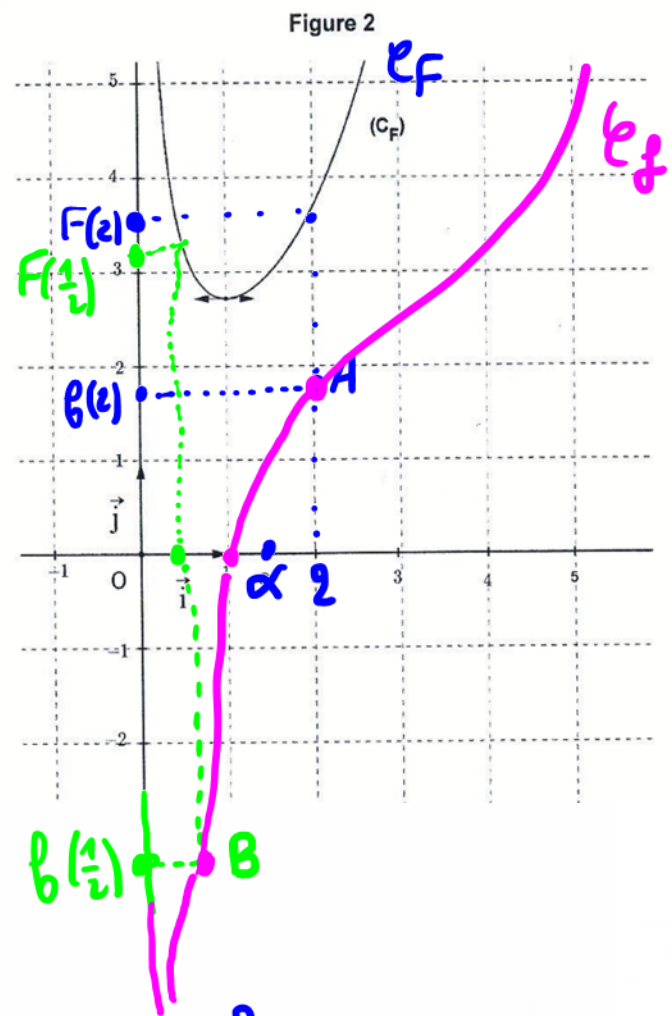
$=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

$=f(x)$

II/ Dans **la figure 2** de l'annexe jointe, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe (C_F) et on a placé un réel $\alpha > 1$ sur l'axe des abscisses.

1) a) En utilisant (C_F), construire les points $A(2, f(2))$ et $B\left(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})\right)$.

b) Tracer la courbe (C_f). (On précisera le point d'abscisse 1).



$A(2, f(2))$

$A(2, f(2))$
$B(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$

$f(x) = (x-1)\frac{e^x}{x^2}$ $\quad F(x) = \frac{e^x}{x}$

$f(2) = (2-1)\frac{e^2}{2^2} = \boxed{\frac{1}{4}}e^2$

$F(2) = \frac{e^2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}e^2$

$f(2) = \frac{1}{2}F(2)$

$B(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}-1)\frac{e^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})^2} = (-\frac{1}{2})\frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{4}} = (-\frac{1}{2})\cdot\frac{4}{1}e^{\frac{1}{2}} = \frac{-4}{2}e^{\frac{1}{2}} = \boxed{-2e^{\frac{1}{2}}}$

$F(\frac{1}{2}) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{1} = \boxed{2e^{\frac{1}{2}}}$

$f(\frac{1}{2}) = -F(\frac{1}{2})$

$f(1) = (1-1)\frac{e^1}{1^2} = 0$

2) Soit $t \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ et $S(t)$ la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$. On note $A(t)$ l'aire de la partie $S(t)$.

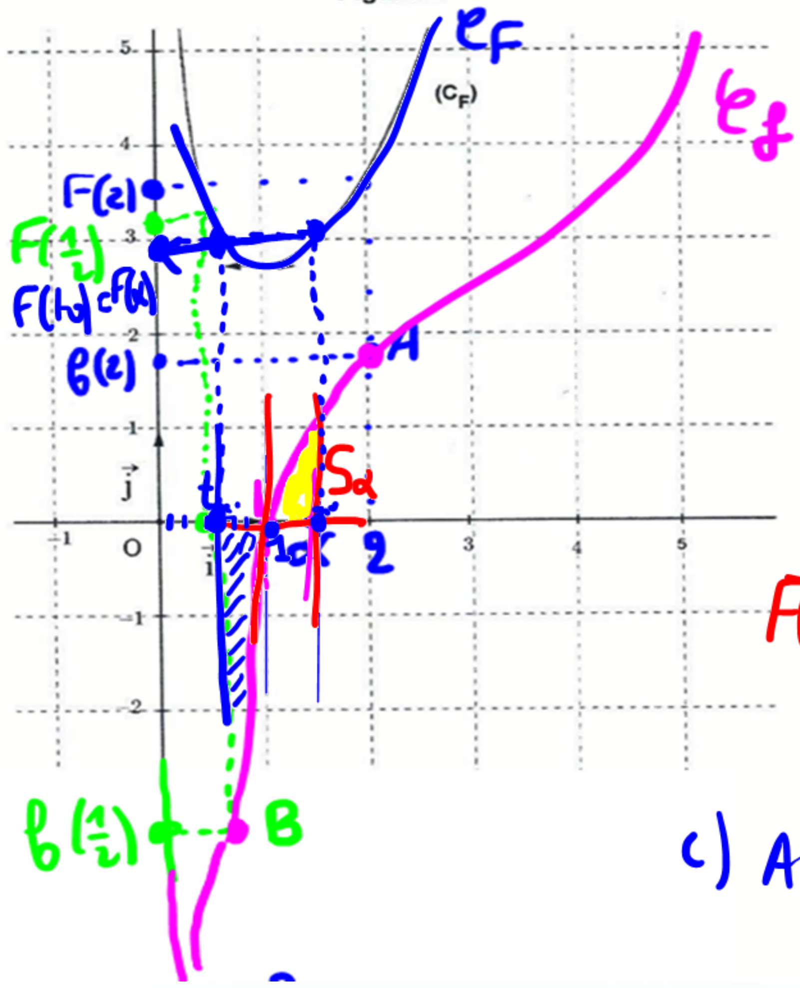
a) Hachurer $S(\alpha)$.

b) Vérifier que $A(\alpha) = F(\alpha) - e$.

c) Soit $t \in]0, 1[$. Montrer que $A(t) = F(t) - e$.

d) En utilisant (C_F), construire sur l'axe des abscisses, le réel $t_0 \in]0,1[$ tel que $A(t_0) = A(\alpha)$.

Figure 2



$S(t)$

$S(\alpha)$ = partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$, $x = 1$

b) $A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x)\,dx = [F(x)]_1^\alpha$
$= F(\alpha) - F(1)$
$= F(\alpha) - \frac{e^1}{1}$
$= F(\alpha) - e$

$F(x) = \frac{e^x}{x}$

c) $A(t) = \int_t^1 -f(x)\,dx = \int_1^t f(x)\,dx = [F(x)]_1^t$
$= F(t) - F(1)$
$= F(t) - e$

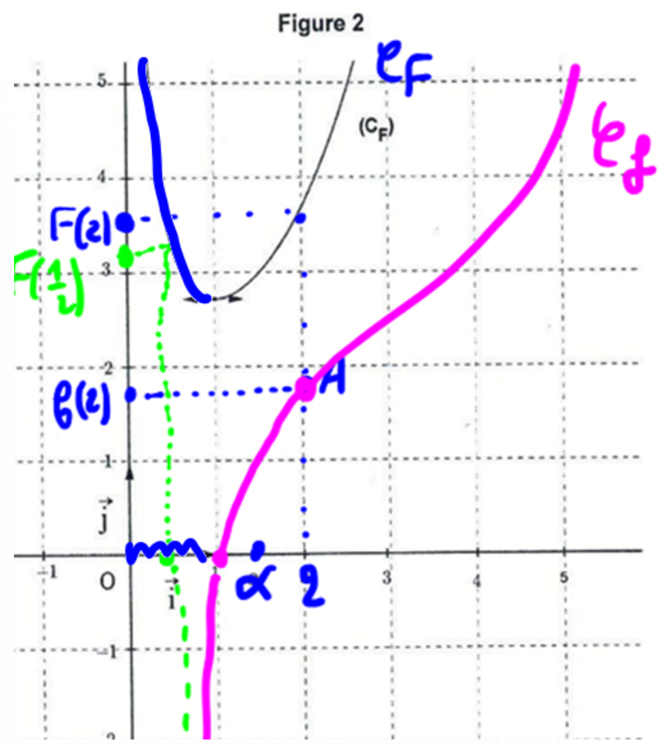
$A(t_0) = A(\alpha)$

$F(t_0) - e = F(\alpha) - e$

$F(t_0) = F(\alpha)$

3) Soit U la suite définie par $u_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} F(x)\,dx$, $n \geq 1$.

a) Déterminer graphiquement le sens de variation de F sur $]0,1]$.



a) graphiquement F est strictement $\boxed{\text{decroissante}}$ sur $\boxed{]0,1]}$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} e^{\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n+1}}$.

c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n u_n$.

b) $\boxed{\text{Soit } t \in \left[\frac{1}{n+1} ; \frac{1}{n}\right]}$

$\boxed{\frac{1}{n} \in]0,1]}$

$\boxed{\frac{1}{n+1} \in]0,1]}$

$n \geq 1$

$0 < \frac{1}{n} \leq 1$

$n+1 \geq 2$

$0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \leq 1$

$$\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$$

$$F\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq F(t) \geq F\left(\frac{1}{n}\right)$$

$a \leq b$

$F(a) \leq F(b)$ si $F \nearrow$

$F(a) \geq F(b)$ si $F \searrow$

avec $F(x) = \frac{e^x}{x}$

$$F\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{e^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n+1}} = e^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n+1}{1} = (n+1)e^{\frac{1}{n+1}}$$

$$F\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{1} = n e^{\frac{1}{n}}$$

$$F\left(\frac{1}{n+1}\right) \geq F(t) \geq F\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(n+1)e^{\frac{1}{n+1}} \geq F(t) \geq n e^{\frac{1}{n}}$$

$$\boxed{n e^{\frac{1}{n}}} \leq \boxed{F(t)} \leq \boxed{(n+1)e^{\frac{1}{n+1}}}$$

$n e^{\frac{1}{n}}$; $F(t)$ et $(n+1)e^{\frac{1}{n+1}}$ continue sur $]0,1]$

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \boxed{ne^{\frac{1}{n}}}dt \leqslant \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} F(t)dt \leqslant \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \boxed{(n+1)e^{\frac{1}{n+1}}}dt$$

$$ne^{\frac{1}{n}}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} 1dt \leqslant u_n \leqslant (n+1)e^{\frac{1}{n+1}}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} 1\,dt$$

$$\int_b^a 1dt = [t]_b^a = a-b$$

$$ne^{\frac{1}{n}}[t]_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant (n+1)e^{\frac{1}{n+1}}[t]_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}$$

$$[t]_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{(n+1)n}$$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\boxed{n}\cdot e^{\frac{1}{n}}\frac{1}{\boxed{n}(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \boxed{(n+1)}e^{\frac{1}{n+1}}\frac{1}{n\boxed{(n+1)}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}}} \leqslant \underbrace{u_n} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n+1}}}$$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}} = ..0.$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n+1}} = ..0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n+1}} = 1$

car $\frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n+1}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = ??$

alors $\lim\limits_{+\infty} nu_n = 1$

$$\frac{1}{n+1}e^{\frac{1}{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\underbrace{\frac{n}{n+1}e^{\frac{1}{n}}}_{\searrow 1} \leqslant \underbrace{nu_n}_{\searrow 1} \leqslant \underbrace{\frac{n}{n}e^{\frac{1}{n+1}}}_{\searrow 1}$$

$\lim\limits_{+\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\searrow 1}\underbrace{e^{\frac{1}{n}}}_{\searrow 1} = 1$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{n}{n}e^{\frac{1}{n+1}} = 1$