RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale 2025
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences Techniques**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

Exercice 1:(4.5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(1,2,0)$; $B(3,-2,2)$; $C(-1,0,4)$ et $G(1,0,2)$.

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-12(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$.

b) Soit P le plan qui passe par les points A, B et C. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $x+y+z-3=0$.

1)a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-2-2\\2-0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\0-2\\4-0\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-4\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-4&-2\\2&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&-2\\2&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&-2\\-4&-2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-16-(-4))\vec{i}-(8-(-4))\vec{j}+(-4-8)\vec{k}$$
$$=(-16+4)\vec{i}-(8+4)\vec{j}+(-12)\vec{k}$$
$$=-12\vec{i}-12\vec{j}-12\vec{k}$$
$$=-12(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$$

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-12\\-12\\-12\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non colinéaires

A, B et C définissent un plan P

$P: ax+by+cz+d=0$

$P: -12x-12y-12z+d=0$

$A(1,2,0)\in P$ $-12\times1-12\times2-12\times0+d=0$

$-12-24+d=0$

$-36+d=0$ $d=36$

$P: -12x - 12y - 12z + 36 = 0$

$P: x + y + z - 3 = 0$

2) a) Montrer que $GA = GB = GC = 2\sqrt{2}$.

b) En déduire que le point G est le centre du cercle (ζ) circonscrit au triangle ABC.

$A(1,2,0)$; $B(3,-2,2)$; $C(-1,0,4)$ et $G(1,0,2)$.

2)a)

$GA = \sqrt{(x_A - x_G)^2 + (y_A - y_G)^2 + (z_A - z_G)^2}$

$= \sqrt{(1-1)^2 + (2-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$GB = \sqrt{(x_B - x_G)^2 + (y_B - y_G)^2 + (z_B - z_G)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$GC = \sqrt{(x_C - x_G)^2 + (y_C - y_G)^2 + (z_C - z_G)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (0-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$GA = GB = GC = 2\sqrt{2}$

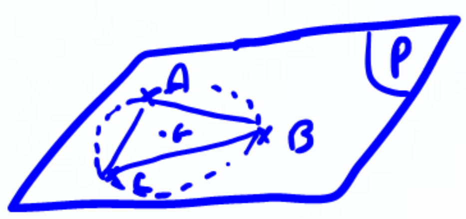
b) $P: x + y + z - 3 = 0$

$1 + 0 + 2 - 3$

$3 - 3 = 0$

$G \in P$

$GA = GB = GC$



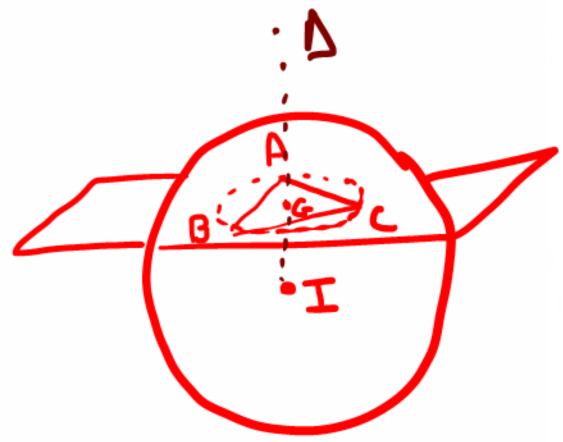
G : centre de cercle (ζ) circonscrit au triangle ABC

3) Soit S une sphère de rayon $\sqrt{11}$ qui coupe le plan P suivant le cercle (ζ).

On note I le centre de la sphère S et Δ la droite perpendiculaire au plan P en G.

a) Justifier que le point I appartient à la droite Δ.

b) Montrer que $IG^2 = 3$.



a) $S \cap P$ au cercle $(\mathscr{C})$ de centre G

S : centre I

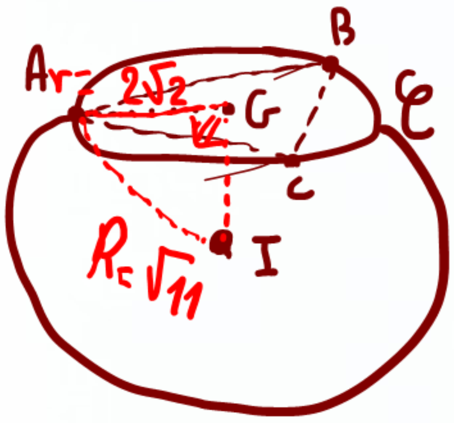
G projeté orthogonal de I sur P

$(IG) \perp P$

$\Delta \perp P$ $\quad$ Δ passant par G

$I \in \Delta$

b)



D'après théorème de Pythagore dans le triangle IGA rectangle en G

$IG^2 + GA^2 = IA^2$

$IG^2 = IA^2 - GA^2$

$= R^2 - (2\sqrt{2})^2$

$= \sqrt{11}^2 - (2\sqrt{2})^2$

$= 11 - 4 \times 2$

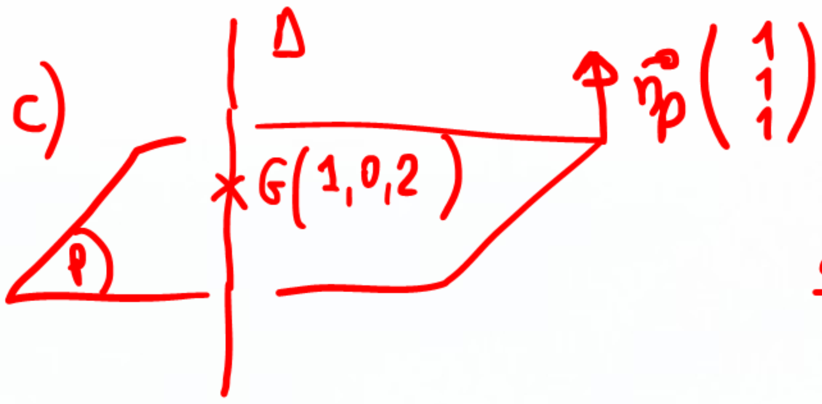
$= 11 - 8 = 3$

$IG^2 = 3$

c) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

d) Montrer qu'il existe deux sphères de rayon $\sqrt{11}$ qui coupent le plan P suivant le cercle (ζ).

c)



Soit $M(x,y,z) \in \Delta$

$\vec{GM} = \alpha \cdot \vec{n}_P \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x_M - x_G \\ y_M - y_G \\ z_M - z_G \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x-1 = \alpha \\ y-0 = \alpha \\ z-2 = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\Delta \begin{cases} x = \alpha+1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha+2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

d) Soit S' de centre K et de rayon $\sqrt{11}$

$S' \cap P = \mathcal{C}(G)$

$KG^2 = 3$

$K \in \Delta$

$\begin{cases} x_K = \alpha+1 \\ y_K = \alpha \\ z_K = \alpha+2 \end{cases}$

$KG^2 = (x_G - x_K)^2 + (y_G - y_K)^2 + (z_G - z_K)^2 = 3$

$(1-(\alpha+1))^2 + (0-\alpha)^2 + (2-(\alpha+2))^2 = 3$

$(1-\alpha-1)^2 + (-\alpha)^2 + (2-\alpha-2)^2 = 3$

$(-\alpha)^2 + (-\alpha)^2 + (-\alpha)^2 = 3$

$\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 = 3$

$3\alpha^2 = 3$

$\alpha^2 = 1$

$\alpha = 1$

$\alpha = -1$

si $\alpha = 1$

$\begin{cases} x_K = 1+1 \\ y_K = 1 \\ z_K = 1+2 \end{cases}$

$K(2,1,3)$

si $\alpha = -1$

$\begin{cases} x_K = -1+1 \\ y_K = -1 \\ z_K = -1+2 \end{cases}$

$K(0,-1,1)$

Exercice 2: (4.5 points)

I°) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$(E) : z^2 - \sqrt{2}(2+i)z + 2(1+i) = 0 .$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -\sqrt{2}(2+i) \\ c = 2(1+i) \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= [-\sqrt{2}(2+i)]^2 - 4 \times 1 \times 2(1+i)$

$= 2\boxed{(2+i)^2} - 8(1+i)$

$= 2\boxed{(4+4i+i^2)} - 8 - 8i$

$= 2(4+4i-1) - 8 - 8i$

$= 8 + 8i - 2 - 8 - 8i$

$= -2$

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$

$(i\sqrt{2})^2 = i^2 . \sqrt{2}^2$

$= -1 \times 2$

$= -2$

$\Delta = (i\sqrt{2})^2$ $\qquad \delta = i\sqrt{2}$

$z' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{\sqrt{2}(2+i) - i\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}i - i\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$z'' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{\sqrt{2}(2+i) + i\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}i + i\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$S_{\mathbb{C}} : \{\sqrt{2} ; \sqrt{2} + \sqrt{2}i\}$

II°) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) : $z^2 - (3e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 2(1 + e^{2i\theta}) = 0$.

a) Vérifier que $2e^{i\theta}$ est une solution de l'équation (E_θ).

b) Déduire l'autre solution de l'équation (E_θ).

1) a) $(2e^{i\theta})^2 - (3e^{i\theta} + e^{-i\theta})(2e^{i\theta}) + 2(1 + e^{2i\theta})$

$4e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}(3e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + 2 + 2e^{2i\theta}$

$4e^{2i\theta} - 6e^{2i\theta} - 2e^{0} + 2 + 2e^{2i\theta}$

$4e^{2i\theta} - 6e^{2i\theta} - 2 + 2 + 2e^{2i\theta}$

$4e^{2i\theta} - 6e^{2i\theta} + 2e^{2i\theta} = -2e^{2i\theta} + 2e^{2i\theta} = 0$

alors $2e^{i\theta}$ est une solut de l'equatn E_θ

b) $z' + z'' = -\frac{b}{a}$

$2e^{i\theta} + z'' = \frac{3e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{1}$

$2e^{i\theta} + z'' = 3e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$z'' = 3e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2e^{i\theta}$

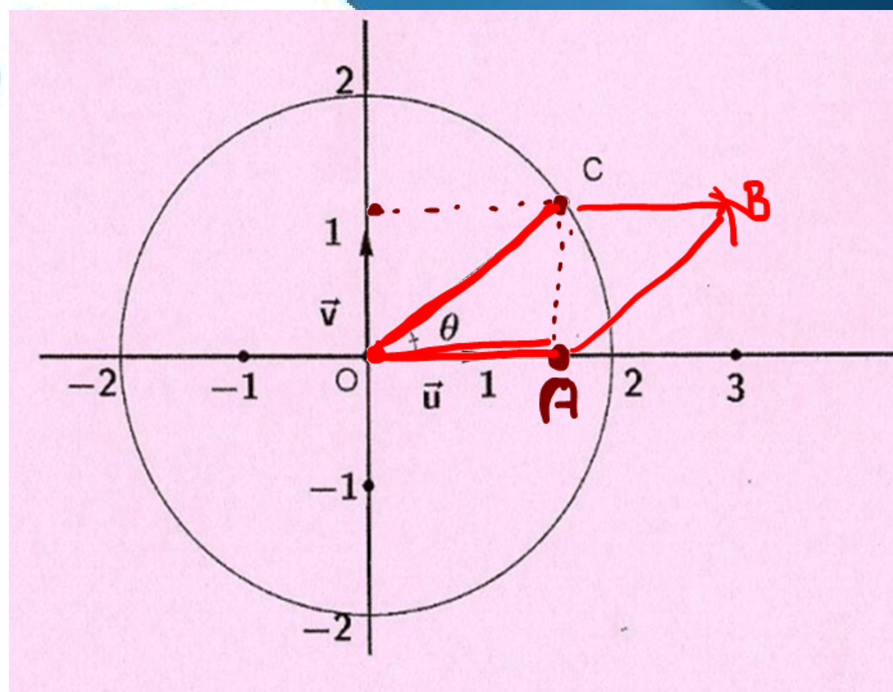
$z'' = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O,u,v). On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = e^{i\theta}+e^{-i\theta}$, $z_B = 3e^{i\theta}+e^{-i\theta}$ et $z_C = 2e^{i\theta}$.

Dans l'**annexe ci-jointe** (**Figure 1**), on a placé le point C.

a) Vérifier que $z_A = \mathrm{Re}(z_C)$. Placer alors le point A dans la figure 1.

b) Montrer que OABC est un parallélogramme puis construire, dans la figure 1, le point B.



a) $z_C = 2e^{i\theta} = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2\cos\theta + 2i\sin\theta$

$\boxed{Re(z_C)} = \boxed{2\cos\theta}$

$z_A = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow 2\cos\theta = e^{i\theta}+e^{-i\theta}$

$\boxed{z_A} = \boxed{2\cos\theta}$

$z_A = Re(z_C)$

b) 

$z_{\vec{OA}} + z_{\vec{OC}} = z_A - z_O + z_C - z_O = z_A + z_C = e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2e^{i\theta} = 3e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$z_{\vec{OB}} = z_B - z_O = z_B = 3e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

$z_{\vec{OA}} + z_{\vec{OC}} = z_{\vec{OB}} \Rightarrow$ OABC est un parallélogramme

c) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme $OABC$. Montrer que $\mathcal{A} = 2\sin 2\theta$.

d) Déterminer la valeur de θ pour laquelle l'aire $\mathcal{A}$ est maximale.

c) $\mathcal{A} = OA \times AC = |z_A - z_O| \cdot |z_C - z_A|$

$= |z_A|\,|z_C - z_A|$

$= |2\cos\theta| \cdot |2\cos\theta + 2i\sin\theta - 2\cos\theta|$

$= |2\cos\theta|\,|2i\sin\theta|$

$= |2|\,|\cos\theta|\,|2i|\,|\sin\theta|$

$= 2 \times 2\,|\cos\theta \cdot \sin\theta| = 2\,|\underbrace{2\cos\theta\sin\theta}|$

$= 2\sin 2\theta$

$\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

d) $\mathcal{A} = 2\sin 2\theta$

$\sin 2\theta = 1$

$\sin 2\theta = \sin\frac{\pi}{2}$

$2\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ rd

Exercice 3: (4.5 points)

Une usine fabrique deux types de circuits notés T_1 et T_2 à l'aide de deux composants électriques C_1 et C_2.

On choisit au hasard un circuit et on note les événements suivants :

C_1 : « Le composant C_1 n'est pas défectueux ».

C_2 : « Le composant C_2 n'est pas défectueux ».

T_1 : « Le circuit T_1 est en état de marche ».

T_2 : « Le circuit T_2 est en état de marche ».

$P(C_1) = 0,9$ et $P(C_2) = 0,8$ sont les probabilités respectives des événements C_1 et C_2.

On admet que :

- Les événements C_1 et C_2 sont indépendants.
- $T_1 = C_1 \cap C_2$.
- $T_2 = C_1 \cup C_2$.

1) Montrer que $P(T_1) = 0,72$ et que $P(T_2) = 0,98$.

1)
$p(T_1) = p(C_1 \cap C_2)$
$= p(C_1) \times p(C_2)$
$= 0,9 \times 0,8$
$= 0,72$

$p(T_2) = p(C_1 \cup C_2)$
$= p(C_1) + p(C_2) - p(C_1 \cap C_2)$
$= 0,9 + 0,8 - 0,72$
$= 0,98$

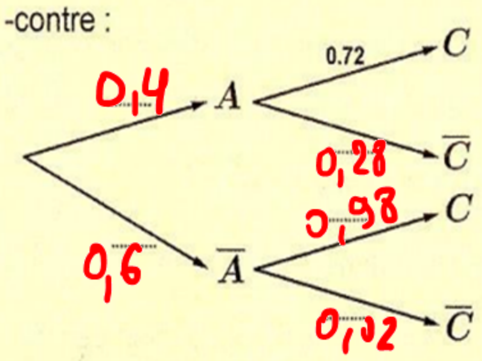
2) On sait que 40% des circuits fabriqués sont du type T_1.

Soient les événements suivants :

A :« Le circuit choisi est du type T_1 ».

C :« Le circuit choisi est en état de marche ».

a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci -contre :



$p(C/\bar{A}) = p(T_2) = 0{,}98$

b) Montrer que $P(C) = 0{,}876$.

c) Le circuit choisi est en état de marche. Calculer la probabilité pour qu'il soit du type T_1.

b) $p(C) = p(C \cap A) + p(C \cap \bar{A})$

$= p(C/A) \cdot p(A) + p(C/\bar{A}) \cdot p(\bar{A})$

$= 0{,}72 \times 0{,}4 + 0{,}98 \times 0{,}6$

$= 0{,}876$

c) $p(A/C) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(C)} = \dfrac{p(C/A) \cdot p(A)}{p(C)} = \dfrac{0{,}72 \times 0{,}4}{0{,}876} = 0{,}328$

3) Soit n un entier naturel non nul. Un commerçant achète n circuits du type T_2.

On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de circuits achetés qui ne sont pas en état de marche.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Déterminer la valeur de n pour que le nombre moyen de circuits achetés qui ne sont pas en état de marche soit égal à 20.

3) a) X suit une loi binomiale de paramètre n = nb de circuits achetés de type T_2

$p = p(\overline{T_2}) = 1 - p(T_2)$

$= 1 - 0{,}98$

$= 0{,}02$

$p(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$

$= C_n^k (0{,}02)^k (1-0{,}02)^{n-k}$ $\quad k = \{0,1,2,\dots,n\}$

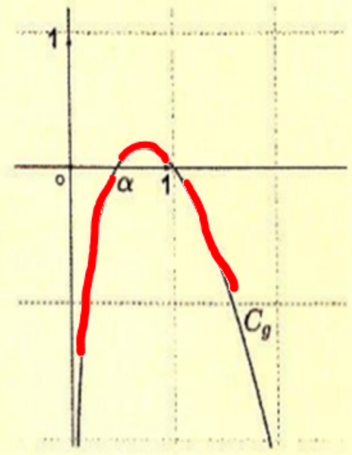
b) $E(X) = 20$

$E(X) = n \times p$ $\quad n \times p = 20$

$n = \frac{20}{p} = \frac{20}{0{,}02} = 1000$

Exercice 4 : (6.5 points)

I) Dans la figure ci-contre, on a tracé dans un repère orthonormé la courbe (C_g) représentative de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $\boxed{g(x) = 1 - x^2 + \ln(x)}$. (C_g) coupe l'axe des abscisses exactement en deux points d'abscisses 1 et α avec $\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}}$.



Par une lecture graphique, donner le signe de $g(x)$, pour $x \in]0,+\infty[$

x	0		α		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

II) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement le résultat.

$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

1) a) $\lim_{0^+} f(x)=\lim_{0^+}\frac{1+\ln x}{x}=\lim_{0^+}\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

$=\lim_{0^+}\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}(\underbrace{1+\ln x}_{-\infty})=-\infty$

$\lim_{0^+}\frac{1}{x}=+\infty$

$\lim_{0^+}\ln x=-\infty$

$\Delta : x=0$ est une asymptote vertical à C_f

$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to a} f(x)=\infty \\ \Delta : x=a \text{ est une asymptote vertical à } C_f\end{array}}$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{0}=0$

$\lim_{+\infty}\frac{a}{x}=0$

$\lim_{+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\Delta : y=0$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$

$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to\infty} f(x)=a \\ \Delta : y=a \text{ est une asymptote horizontal à } C_f \text{ au voisinage de } \infty\end{array}}$

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \boxed{\frac{u'.v - v'.u}{v^2}}$

$(a)' = 0$

$(x)' = 1$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

2) a) $]0,+\infty[$

$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ dérivable sur $]0,+\infty[$

$f'(x) = \frac{(1+\ln x)'.x - x'(1+\ln x)}{x^2}$

$= \frac{(0+\frac{1}{x}).x - 1(1+\ln x)}{x^2}$

$= \frac{\frac{1}{x}.x - 1 - \ln x}{x^2}$

$= \frac{1-1-\ln x}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

b) $f'(x) = \boxed{-\frac{\ln x}{x^2}}$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{1+\ln 1}{1} = \frac{1+0}{1} = 1$

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a : $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x}$.

b) Déduire alors la position relative de la courbe (C_f) et la droite Δ d'équation $y = x$.

c) Dans **l'annexe ci-jointe (Figure2)**, on a tracé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ

et on a placé le réel α sur l'axe des abscisses.

Tracer dans le même repère de la **figure 2**, la courbe (C_f).

3) a)

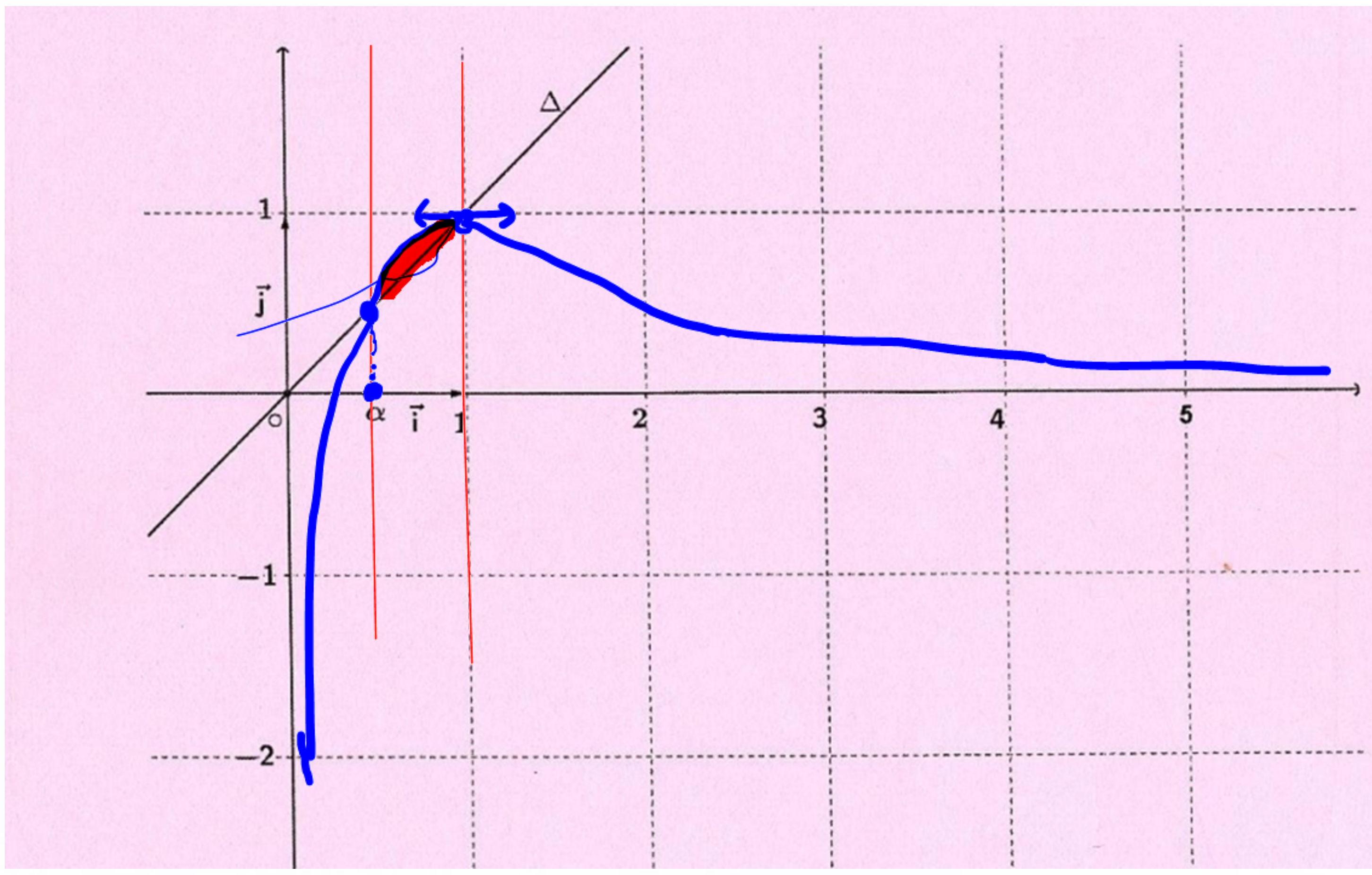
$$f(x)-x=\frac{1+\ln x}{x}-x$$

$$=\frac{1+\ln x}{x}-\frac{x^2}{x}$$

$$=\frac{1+\ln x-x^2}{x}=\frac{g(x)}{x}$$

b) $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x}$

x	0		α		1		$+\infty$
$\dfrac{g(x)}{x}$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
posit relat	||	$\dfrac{\Delta}{C_f}$	$\Delta \cap C_f$	$\dfrac{C_f}{\Delta}$	$\Delta \cap C_f$	$\dfrac{\Delta}{C_f}$	



4) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire (en unité d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe (C_f) , la droite Δ et les droites d'équations : $x = \alpha$ et $x = 1$.

a) Vérifier que $\ln(\alpha) = \alpha^2 - 1$. ✓

b) Montrer que $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\alpha^2(1-\alpha^2)$.

a) $g(\alpha) = 0$ $\quad g(x) = 1 - x^2 + \ln x$

$g(\alpha) = 1 - \alpha^2 + \ln\alpha = 0$

$\ln\alpha = \alpha^2 - 1$

b) $A = \int_\alpha^1 (f(x) - y)\,dx = \int_\alpha^1 (f(x) - x)\,dx$

$= \int_\alpha^1 \left(\frac{1+\ln x}{x} - x\right) dx$

$= \int_\alpha^1 \frac{1}{x}\,dx + \int_\alpha^1 \frac{\ln x}{x}\,dx - \int_\alpha^1 x\,dx$

$\int_\alpha^1 \frac{1}{x}\ln x$

$\int u'u = \left[\frac{u^2}{2}\right]$

$= [\ln x]_\alpha^1 + \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_\alpha^1 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1$

$= \ln 1 - \ln\alpha + \frac{\ln^2 1}{2} - \frac{\ln^2\alpha}{2} - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}\right)$

$= -\ln\alpha - \frac{\ln^2\alpha}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2}$

$= -(\alpha^2 - 1) - \frac{(\alpha^2-1)^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2}$

$= -\alpha^2 + 1 - \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2}$

$= \frac{-2\alpha^2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2}$

$= \frac{-2\alpha^2 + 2 - \alpha^4 + 2\alpha^2 - 1 - 1 + \alpha^2}{2}$

$= \frac{-\alpha^4 + \alpha^2}{2} = \frac{1}{2}(-\alpha^4 + \alpha^2)$

$= \frac{1}{2}\alpha^2(-\alpha^2 + 1)$

$= \frac{1}{2}\alpha^2(1 - \alpha^2)$ u.a

5) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\alpha < u_n < 1$.

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

a) pour $n = 0$

$\alpha < U_0 = \frac{1}{2} < 1$

vrai à l'indice 0

supposons que $\alpha < U_n < 1$

et montrons que $\underbrace{\alpha < U_{n+1} < 1}$

f est strictement croissante sur $[\alpha, 1]$

$\alpha < U_n < 1$

$f(\alpha) < f(U_n) < f(1)$

$\underbrace{\alpha} < \underbrace{U_{n+1}} < \underbrace{1}$

$f(\alpha) = \frac{1 + \ln \alpha}{\alpha}$

$= \frac{1 + \alpha^2 - 1}{\alpha} = \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$

$f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = \frac{1+0}{1} = 1$

Conclusion $\alpha < U_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n > 0$

alors U_n est croissante

$f(x) - x = \frac{g(x)}{x} > 0$ sur $[\alpha, 1]$

c) U_n est croissante

U_n est majorée par 1

alors U_n est croissante

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$